

## V/1. Matematika vs. informatika

### Természetes szám a nulla?

Az ELTE IK-n és a BME VIK-en oktató programozás nagyon jellemző különbsége a listák indexelése. Az ELTE-n a listaelemek számozását a feladatok megfogalmazásából származtatva, általában 1-től kezdik, az indexelés  $i = 1$ -től  $i \leq$  elemszám-ig tart, míg a BME-n az  $i = 0$ -tól  $i <$  elemszám használata vagy lezáróelem használata szokásos. (Ezt láthatjuk a kereséssel kapcsolatos példákban is.) Érvek mindkét használathoz bőségesen sorakoznak, kezdő programozótól a professzorokig mindenki preferál valamilyen megoldást. Dijkstra írása [50] 1982-ben született, véleményének súlyát személyes elismertsége adja. Az írással kapcsolatban sokan kifejtették véleményüket, ezek között egy, a Dijkstra említett írása kapcsán készült Hacker News-blog<sup>38</sup>. Érvek és ellenérvek, melyeknél a legfőbb szempont egy-egy, az értelmezéshez kapcsolódó másik fogalom vagy alkalmazás. Az épületek emeleteinek, illetve szintjeinek számozása, a születésnapok számozása, a kezdet létezése, a vég-kezdet értelmezése. (Pl. 10–14 óráig, ha minden egész órában be kell vennem egy gyógyszert, akkor hány gyógyszert kell reggel bekészítenem.) Dijkstra a természetes számok halmazának definíciójához is kapcsolja az érvelését:

*„And the moral of the story is that we had better regard —after all those centuries! — zero as a most natural number.”*

*„És a történet erkölcsi oldala, hogy – sok száz év után! – a nullát természetes számnak kell tekintenünk”.*

Az, hogy a nulla természetes szám-e vagy sem, a matematika területéhez kapcsolódó kérdés. Idézem a Wikipédián megtalálható véleményt erről:

*„Mivel ez nem szorosabb értelemben véve matematikai probléma (nem lehet matematikai tételekből kiszámítani vagy bebizonyítani, természetes szám-e a nulla), hanem pusztán egy elnevezés tartalmáról való döntés, így definíció, megállapodás kérdése, hogy mi tartozik a névvel jelölt csoporthoz. A kérdés mégsem érdektelen, mert, bár a probléma nem matematikai jellegű, eldöntésének már vannak ilyen következményei – a feladatok, állítások, tételek rendszeresen hivatkoznak a természetes számok halmazára, és a feladat megoldhatóságát, a tétel érvényességét vagy bizonyíthatóságát döntheti el a fogalom értelmezése.”*

---

<sup>38</sup> Hacker News (2011.06.21) <https://news.ycombinator.com/item?id=2679769> [2021.10.30]

Pusztán egy elnevezés tartalmáról szóló döntés, ami nem matematikai jellegű probléma? Akkor milyen probléma? Filozófiai probléma vagy esetleg erkölcsi? A döntések gyakorlata informatikai probléma, ezért ez egy (erkölcsi) visszahatása az informatikának a matematikára?

Én még úgy tanultam az általános iskolában (197x) matematikából, hogy a nulla nem természetes szám, de az egyetemen (198x) már azt tanultam, hogy természetes szám. Egy 2017-ben írt szakdolgozatban [51] az első Peano axióma a  $0 \in \mathbb{N}$ , de lábjegyzetben megjegyzésként olvashatjuk, hogy eredetileg 1 volt a 0 helyett, valójában megállapodás kérdése, a szerző a közoktatásban elfogadott értelmezést használja. A programtervező informatikus képzésben, a tervezési szakaszban, amelyben jellemzőbb a matematika hatása, mégis inkább az 1 a sorozatok első indexe, ami megfelel a közoktatásbeli – és ezért közismeretnek megfelelő – sorozatdefiníciónak. A közoktatás mentén tovább vizsgálva a témakört, az egyik legismertebb feladat:

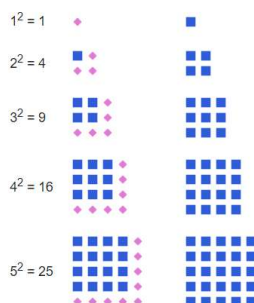
*Példa:*

*Adjuk meg az  $n$ . négyzetszámot, majd ezt követően adjuk meg az első  $n$  négyzetszám összegét.*

Érdeemes megvizsgálni, mit ír erről a Wikipédia<sup>39</sup> (mivel sok diák ezt nézi meg).

*„A számelméletben négyzetszámon vagy teljes négyzeten (teljes második hatványon) olyan egész számot értenek, amely felírható valamely egész szám négyzeteként...”*

Ezt követően látható a [26. ábra](#)



26. ábra: Négyzetszámok ábrázolása

Majd: „ $0^2 = 0$ , a nulladik négyzetszám” megállapítást követően „Példa”-ként egy lista olvasható a négyzetszámokról, hivatkozva a <https://oeis.org/A000290> oldalra, ahol – ahogy a [27. ábra](#) mutatja – az első érték a 0.

<sup>39</sup> Wikipédia: Négyzetszámok (2018.11.27) <https://hu.wikipedia.org/wiki/N%C3%A9gyzetsz%C3%A1mok> [2021.10.30]

A000290	The squares: a(n) = n^2. (Formerly M3356 N1350)	2151
	0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961, 1024, 1089, 1156, 1225, 1296, 1369, 1444, 1521, 1600, 1681, 1764, 1849, 1936, 2025, 2116, 2209, 2304, 2401, 2500 ( <a href="#">list</a> ; <a href="#">graph</a> ; <a href="#">refs</a> ; <a href="#">listen</a> ; <a href="#">history</a> ; <a href="#">text</a> ; <a href="#">internal format</a> )	
OFFSET	0,3	
COMMENTS	To test if a number is a square, see Cohen, p. 40. - <a href="#">N. J. A. Sloane</a> , Jun 19 2011 Zero followed by partial sums of <a href="#">A005408</a> (odd numbers). - <a href="#">Jeremy Gardiner</a> , Aug 13 2002 Begin with n, add the next number, subtract the previous number and so on ending with subtracting a 1: a(n) = n + (n+1) - (n-1) + (n+2) - (n-2) + (n+3) - (n-3) + ... + (2n-1) - 1 = n^2. - <a href="#">Aamrath Murthy</a> , Mar 24 2004	

### 27. ábra: Négyzetszámok felsorolása

Majd ezt követi az első tulajdonság: *Az n-edik négyzetszám képlete  $n^2$  ...:*

$$n^2 = \sum_{k=1}^n (2k - 1)$$

Melyik az első négyzetszám?  $n = 0$  esetén hogyan értelmezhető a képlet? Az a megállapítás, hogy a „0 a nulladik négyzetszám”, zavart okoz, mivel a sorozatok indexelése 1-től kezdődik és semmi nem utal arra, hogy átértelmezték volna a sorozat definícióját. A négyzetszámok nagyságszerinti sorozatában: 0, 1, 4, 9... – az első a 0. A képlet nem zárja ki az  $n = 0$  esetet, de nem is mond rá értelmes számítási módot. Kétségtelen, hogy kevésbé szép, de kivédi ezt az alábbi képlet az  $n$ . négyzetszám értelmezésére és számítására:

$$(n - 1)^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (2k - 1) + 1$$

Szabadon eldönthető, hogy a nulla természetes szám-e. Ehhez képest szabadon eldönthető, hogy a sorozatok értelmezési tartománya a természetes számok halmaza vagy a pozitív egészek halmaza. Az eredmény a magyar közoktatásban egy matematikailag értelmetlen definíció, amely szerint annak a sorozatnak, amelyiknek definíció szerint nincs nulladik eleme, mégiscsak van nulladik eleme, de ez nem eleme a sorozatnak.

A probléma nem egyedi, például a Fibonacci-sorozatnál (első két elem 0, 1 vagy 1, 1 és ezeknek mi az indexe), az 5. elem értékének meghatározása, az  $n$ . páros szám értéke pusztán az értelmezési pontatlanságok miatt gondot okoz, mert a természetes számok halmazának, illetve a sorozatnak a definíciója, esetlegesen tartalmazza a 0-t. A probléma akár matematikai, akár nem, a vegyes döntésnek gyakorlati következményei vannak, ezért nem filozófiai probléma. Adott definíciók (megnevezések) értelmezése alternatív, amelynek következtében módosulnak a tételek. Az értelmezésből adódó modellezés, azaz a specifikáció a kulcs. Az adathoz más értelmezést rendelve módosul az információ, másik modellt kapunk, ezért – azt gondolom – az informatika tudományhoz tartozó problémáról van szó. De ha a döntés az informatika tudományához tartozik, akkor miért vitatkoznak rajta évtizedeken át az informatikusok? El fog jönni az az idő,

amikor egyértelműen 0-tól indexelnek minden sorozatot? Esetleg lesz egy forradalom, amikor eldöntik, hogy 1-től kell indexelni a sorozatokat? Lehet-e a Dijkstra által adott „erkölcsi” támogatás eredménye az, hogy 100%-os dominanciája legyen az egyik értelmezésnek? Azt gondolom, hogy az informatikának nem ez a feladata. Az informatikus mindig az adott specifikációhoz fogja igazítani az értelmezést, ha hiányzik a pontos értelmezés, akkor minden lehetséges értelmezést figyelembe kell vennie. Ha a matematikában véglegesen úgy építik fel a tételeket, hogy a 0 természetes szám és a sorozatok értelmezési tartománya a természetes számok halmaza lesz... az informatika akkor is az aktuális feladat és a programozó számára legkifejezőbb (humán kategória) módon fogja indexelni a sorozatokat, listákat. A matematikai definíciótól, axiómától függetlenül értelmezik az informatikai modellek a 0 szerepét, mindkét értelmezést gyakorlati helyzetekben alkalmazva.

### Függvény

A függvény fogalmának eltérő értelmezését saját bőrömön tapasztaltam. A feladat így szólt<sup>40</sup>:

*„...Milyen okból korlátozza a double (\*f)(double) paraméter a megvalósítást? Találj ki egy módszert, hogyan kerülöd meg a problémát, és valósítsd is meg C-ben! Gondolj arra, hogy igazából a  $\sin(d*x)$  csak egy példa... Lehetne  $d*\sin(x)$ ,  $d*\sin(c+x)$ , esetleg  $a*\sin(b*x+c)+\text{sqrt}(d*x*x)$  is a függvény, amit ábrázolni kell.”*

A feladat lényege, hogy az  $x$  változón kívül paramétereket – egyet, kettőt, sokat – is kellene kezelnie a megírandó függvénynek. Azonban az „ $a * \sin(b * x + c) + \text{sqrt}(d * x * x)$ ” függvény ábrázolásának felvetése számomra egy matematikához készítendő programot jelentett, amihez a skalárral szorzást, függvények összegét és kompozícióját készítettem el. Számomra az általánosított feladat egy függvényábrázoló program volt, amihez még a kifejezés kiértékelését is megírtam. Egyhónapos munka után megkérdeztem, hogy elég jó lett-e. Némi értetlenkedés után, hogy miért is bonyolítottam el ennyire a feladatot, megértettem, hogy a különböző típusú függvények tetszőleges kompozíciója a matematikatanítás érdekes feladata, a függvényanalízis matematikus probléma. A gyakorlati alkalmazások során egyértelmű, hogy milyen függvény az, amit használni kell (legyen az hanggenerálás vagy röppályaszámítás), ennek a változó mellett csak a paraméterei átadását kell megoldani, a kiszámítási módot a konkrét esetre megírják (kódolják).

---

<sup>40</sup> C11 és C++11 programozás (választható tárgy) 1. labor 1. feladat, BME VIK 2017.

- Matematikában a függvény egy – jellemzően számok közötti – összerendelési szabály (egyértelmű reláció), aminek vizsgáljuk a szélsőértékeit, gyökeket, menetét, folytonosságát és számos tulajdonságát.
- Informatikában a függvény egy programkód, ami a bemenetén kapott argumentumokat is felhasználva – esetleg mellékhatást is okozva – van, hogy létrehoz a kimenetén egy eredményt.

Az informatika függvényfogalma a matematika függvényfogalmához képest nem csak általánosabb, de más a szerepe, mások a jellemzői. Ezzel együtt a matematika függvényfogalma – más értelemben véve – általánosabb. Matematikatanári szemmel a példában más tulajdonságok megadását véltem megtalálni, mint amire a feladat informatikus kitűzője gondolt.