MATEMATIKA

Budapesti Számítástechnikai Alkalmazói Verseny 2001

Iskolai forduló, II. kategória

Az iskolai forduló során a matematika és az érettségi témakörét kell feldolgoznia az alább megadottak szerint.

A feladatsorhoz fájlban megadott szöveget a mellette található képek segítségével a mintának megfelelően kell megformázni. Mint látható, a szöveg a matematika érettségin nagy valószínűséggel előforduló tételek kidolgozása.

Ugyancsak fájlban megtalálható az elmúlt 20 év érettségin szereplő tételszámai, valamint egy csoport tételekből írt dolgozatának eredményei. Ebben a „tételdolgozatban” a szövegben szereplő tételekből mindenkinek csak hármat kellett bizonyítania, és mindegyik feladat 5 pontot ért. Feladata, hogy elemezze a tételek eddigi érettségi szereplését, és a diákok dolgozateredményét.

Végül, de nem utolsó sorban, a szövegben szereplő tételek közül válasszon ki tetszőlegesen egyet, és készítsen hozzá egy-két diát, de sok animációt tartalmazó bizonyítási bemutatót!

Szövegszerkesztés

1. Olvassa végig a szöveget, javítsa ki a helyesírási hibákat, és illessze be a megfelelő helyekre az ábrákat, egyenleteket, hiányzó szimbólumokat! Az ábrák szövegen kívül, balról körülfutottan, a képek a szövegben legyenek.
2. Az alábbi stílusok elkészítésével formázza a kapott szöveget!

Vcím:	14 pontos félkövér, Arial betű; középre zárt, előtte 36, utána 24 pont térköz.
Tételszám:	12 pontos Times, félkövér, dőlt; bal oldali behúzás 1,5 cm, térköz előtte 18, utána 6 pont, együtt tartás a következő bekezdéssel.
Tétel:	12 pontos Times, dőlt; sorkizárt bekezdés után 6 pont, együtt tartás a következővel.
Bizonyítás:	12 pontos Times, bal oldali behúzás 1 cm, függő behúzás 0,75 cm, tabulátor balra igazított 1,75 cm-nél.
Megjegyzés:	12 pontos Times, baloldali behúzás 1 cm, sorkizárt, előtte 3 pontos térköz.

3. Matematikai jelöléseknél a pontok, egyenesek szögek, változók jelölései dőlt betűsek, ennek megfelelően javítsa a szöveget!
4. Készítse el az élőfejet, jobboldalt középre igazítva írja be nevét és iskolája nevét! Az élőlábba tegyen középre igazított oldalszámozást!
5. A dokumentum végére készítsen tartalomjegyzéket, és állítsa kéthasábosra!

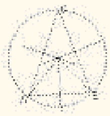
Versenyző Neve
Iskola Neve

Geometria tételek

35.

Tétel: A háromszög oldalainak felezőmerőlegesei egy pontban metszik egymást.

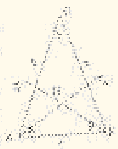
- Legyen az *ABC* háromszög oldalainak felezőmerőlegese *e*. Ennek minden pontja egyenlő távolságra van *A*-tól és *B*-től.
- A *BC* oldal felezőmerőlegese *f*. Ennek minden pontja egyenlő távolságra van *B*-től és *C*-től.
- Mivel *AB* és *BC* metszi egymást, felezőmerőlegeseik *e* és *f* is metszik egymást.
- Az *M* metszéspont egyenlő távolságra van *A*-tól és *B*-től és *B*-től és *C*-től is, vagyis mindhárom ponttól, ezenkívül *A*-tól és *C*-től is. Tehát *M* rajta van az *AC* oldal felezőmerőlegesén.



Ezzel állításunkat bebizonyítottuk. A három felezőmerőleges egyetlen közös pontja az *M*, a háromszög három csúcsától egyenlő távolságra van. Így ez a pont a háromszög köré írható kör középpontja.

36.

Tétel: A háromszög belső szögfelezői egy pontban metszik egymást.



- Legyen az *ABC* háromszög α szögének szögfelezője f_α.
- Ennek minden pontja egyenlő távolságra van a *b* és a *c* oldaltól.
- A β szög szögfelezője f_β. Ennek minden pontja egyenlő távolságra van az *a* oldaltól és a *c* oldaltól.
- Az f_α és az f_β szögfelezők a háromszög belsejében metszik egymást, a metszéspont *O*, amely egyenlő távolságra van *b*-től és *c*-től is, és *a*-tól és *c*-től is, vagyis mindhárom oldaltól. Ezenkívül egyenlő távol van *a*-tól és *b*-től is, tehát rajta van γ szögfelezőjén is (kihasználjuk, hogy *O* a háromszög belsejében van).

A három belső szögfelező egyetlen közös pontja az *O*, az *ABC* háromszög mindhárom oldalát érintő kör középpontja.

37.

Tétel: A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást.

A háromszög magasságvonala a háromszög egyik csúcsából a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőleges. Egy háromszögnek három magasságvonala van.

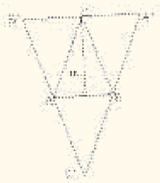
m_a az *ABC* háromszög *A* csúcsához tartozó magasságvonala, m_b a *B* csúcshoz tartozó magasságvonal, m_c a *C* csúcshoz tartozó magasságvonal.

- Húzzunk a háromszög csúcsain keresztül párhuzamosokat a szemközti oldalakkal.

1

Versenyző Neve
Iskola Neve

- Az eredeti háromszög csúcsai *A*, *B*, *C*, az új háromszög csúcsai *A'*, *B'*, *C'* (az ábra szerint).
- Az *A'B'C'* háromszög szerkesztéséből következik, hogy az *ABCB'*, *AC'BC*, *ABA'C* négyszögek paralelogrammák. Az eredeti háromszög oldalai az új háromszögnek középvonalai.
- Az *A* csúcs a *B'C'* oldal felezőpontja, *B* az *A'C'* oldal felezőpontja, *C* az *A'B'* oldal felezőpontja. Így – az *A'B'C'* háromszög szerkesztését figyelembe véve – az m_c magasságvonal egyúttal az *A'B'* oldal felezőmerőlegese, m_b az *A'C'* oldal felezőmerőlegese, m_a a *B'C'* oldal felezőmerőlegese.
- Mivel az eredeti háromszög magasságvonalai az új háromszög felezőmerőlegesei, és bármely háromszög felezőmerőlegesei egy pontban metszik egymást, ezért a háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást.



A háromszög magasságvonalainak metszéspontját a háromszög magasságpontjának nevezzük.

38/a.

Thalész tétele: Egy kör tetszőleges átmérőjének két végpontját a körvonal bármely más pontjával összekötve derékszögű háromszöget kapunk. Az átmérő a derékszögű háromszög átfogója.

A kör átmérője legyen *AB*, a körvonal tetszőleges, *A*-tól és *B*-től különböző pontja *C*. Rajzoljuk be az *OC* sugarat.

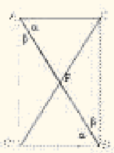
- Az *AOC* és a *BOC* háromszög egyenlő szárú.
- Az *AOC* háromszögnek az alapon fekvő szögét jelöljük α-val, a *BOC* háromszögnek az alapon fekvő szögét β-val.
- Az *ABC* háromszög belső szögeinek összege $\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180°$. Ezt rendezve és kettővel osztva kapjuk, hogy $\alpha + \beta = 90°$.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

38/b.

Thalész tételének megfordítása: Derékszögű háromszög köré írt kör középpontja az átfogó felezőpontja, az átfogó a kör átmérője.

Azt kell megmutatnunk, hogy az átfogó felezőpontja egyenlő távolságra van a háromszög csúcsaitól.



Tükrözzük az *ABC* háromszöget az átfogó *F* felezőpontjára.

- A középpontos tükrözés tulajdonságai miatt egy olyan paralelogrammát kapunk, amelynek két szemközti szöge derékszög. A paralelogramma tehát téglalap.
- A téglalap átlói egyenlő hosszúak és felezik egymást. Így tehát *AF* = *BF* = *CF*, épp a háromszög köré írt kör sugarával egyenlők.

2

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

55.

Tétel: A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást.

Egy háromszög súlyvonala a háromszög egyik csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz. A háromszögnek három súlyvonala van.

- Az ABC háromszög AC oldalának felezőpontja E, BC oldalának felezőpontja F. A BE és az AF súlyvonalak metszéspontja S.
- Az EF középvonal párhuzamos az AB oldallal, ezért SEF és SBA szögek váltószögek, az EFS és SAB szögek szintén váltószögek, ESF és ASB szögek pedig csúcsszögek.
- Tehát az ABS és az FES háromszögek hasonlók, mert szögeik páronként egyenlők.
- Mivel az EF középvonal hossza fele a szemközti AB oldal hosszának, ezért a hasonlóság aránya 2:1. Így az EB és az FA súlyvonal az EB szakasz E-hez közelebbi harmadoló pontjában metszi egymást.
- Hasonlóan látható be, hogy az EB súlyvonal és a C csúcsból induló súlyvonal is ugyanebben a pontban (S-ben) metszi egymást.

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

A háromszög súlyvonalainak metszéspontját súlypontnak hívjuk. Mint a bizonyításból kiderül, a súlypont az egyes súlyvonalak az oldalakhoz közelebbi harmadoló pontja.

58

Szögfelezőtétel: A háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja.

A háromszög B csúcsából induló szögfelező a szemközti oldalt a D pontban két részre osztja. Jelöljük ezeket b_1-gyel és b_2-vel.

A tétel állítása szerint: $\frac{b_1}{b_2} = \frac{a}{c}$.

- Hosszabbítsuk meg a háromszög c oldalát B-n túl a-val.
- Az így kapott E pontot C-vel összekötve CBE egyenlő szárú háromszöget kapunk.
- Ennek a B csúcsánál levő külső szöge β, így az alapon fekvő szögei $\beta/2$ nagyságúak.
- A CEB és EBA szögek egyállásúak, mivel egyik száruk közös és nagyságuk megegyezik. Így másik száruk BD és EC párhuzamos.
- Az A csúcsnál lévő szögre a párhuzamos szelők tételét alkalmazva a bizonyítandó állítást kapjuk.

63.

Befogótétel: A derékszögű háromszög befogója az átfogónak és a befogó átfogóra eső merőleges vetületének mértani közepe.

Legyen az ABC derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasságának talppontja T.

A BC (a) befogóra bizonyítjuk, hogy BT (p) és az AB (c) mértani közepe.

- Az ABC háromszög hasonló a BTC háromszöghöz, mert egy-egy szöge (β) közös, és van egy derékszögük, így szögeik megegyeznek.
- A β szög melletti befogók és az átfogók arányát felírva $\frac{a}{p} = \frac{c}{a}$.
- Innen $a^2 = pc$. Mivel a csak pozitív lehet $a = \sqrt{pc}$.

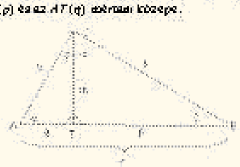
Hasonlóan bizonyítható, hogy $b = \sqrt{qc}$.

Ezzel a tételt bizonyítottuk.

64.

Magasságtétel: A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogót két szeletre osztja, melyeknek mértani közepe a magasság.

Legyen az ABC derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasságának (m) talppontja T. Az m magasságra bizonyítjuk, hogy a BT (p) és az AT (q) mértani közepe.



- Az ACB derékszöget az m magasság két részre bontja, melyből TCB a TAB (α) szöggel azonos nagyságú, mert azonos fajtájú merőleges szárú szögek.
- Ugyanígy ACT szög egyenlő ABC (β) szöggel.
- Mivel ATC és CTB háromszögek derékszögűek, mindhárom szögük megegyezik, tehát a két háromszög hasonló.
- A hasonlóság miatt megfelelő oldalak, vagyis a megfelelő (α, illetve β) szögek melletti befogókra felírt arányuk megegyezik.
- Ezért $\frac{m}{p} = \frac{q}{m}$,
- Innen $m^2 = pq$. Mivel a magasság pozitív, $m = \sqrt{pq}$.

Ezzel a tételt bizonyítottuk.

Tartalom

Táblázatkezelés

A mintának megfelelő helyeken, függvényekkel válaszoljon a következő kérdésekre:

1. Hány feladat tartozik az egyes témakörökhöz?
2. Írja be az érettségi feladatok mellé, hogy melyik témakörből valók!
3. Hányszor adtak feladatokat az egyes témakörökből?
4. Melyik témakörből van leggyakrabban az érettségin feladat?
5. A témakörhöz tartozó feladatok számához képest milyen arányban szerepeltek eddig a feladatok?
6. Melyik témakör szerepelt a legnagyobb arányban?
7. Számítsa ki, hány pontot értek el a diákok a dolgozatban, és ez milyen jegynek felel meg! Ponthatárok: 8-tól 2-es, 10-től 3-as, 12-től négyes, 14-től 5-ös.
8. Adja meg az egyes feladatokra, az összpontszámra és az osztályzatra, hogy átlagosan mennyi az eredmény!
9. Függvénnyel adja meg, hogy az egyes jegyekből hány darab született!
10. Készítsen diagramot a jegyek megoszlásának szemléltetésére!
11. Formázza a munkáját a mintának megfelelően (cella – betűméret 10, címben 12 pont, Times N. R. –; szegély; fektetett oldal; név, iskola a fejlécben; alsó margó 1 cm (0,4 inch); oszlopszélességek kb.: 6×7,1+18,6+1,4+13+9×3,7+5+3,7 – férjen ki a lapra).

Versenyző Neve
Iskola Neve

Érettségi statisztika

Év	feladat	témakör
1981	102	Sorozatok
1982	22	
1983	58	
1984	20	
1985	56	
1986	102	
1987	42	
1988	41	
1989	90	
1990	102	
1991	90	
1992	101	
1993	63	
1994	40	
1995	87	
1996	87	
1997	37	
1998		
1999	75	
2000		

Témakör	Utolsó feladat	Feladatok száma	Db.	T. Arány
Algebra	23			
Geometria	65			
Trigonometria	78			
Koord.geo	99			
Sorozatok	103	4	4	1
Többi	161			

Leggyakoribb témakör: **témakör**
Arányaiban leggyakoribb: **témakör**

Dolgozat

Név	35	36	37	38/a	38/b	55	58	63	64	össz.	jegy
Bőrönd Ödön	5			5			5			15	5
Del Etele		4			0			0			
Dezó Dóra			5			4			4		
Fél Évi	5				2			3			
Hor Zsolt		2				5			1		
Már Tamás			5	1			3				
Orar Endre	0					3			5		
Raj Zoltán		5		4			4				
Rokons Ági			3		4			5			
Szörny Ella		2		4			2				
Tét Elek			2		4			3			
Tira Misu	5			4					4		
Trap Pista		3			4		1				
Ütleg Elek			1			5		3			
Vincs Eszter	3					0			5		
Atag	3,6										

Ponthatár jegy db

jegyek megoszlása

Bemutató

Bizonyára ismerősek a szövegben szereplő tételek. Remélhetőleg van köztük olyan, amelyiknek a bizonyítását is érti. Ha nem, akkor nagyon figyeljen a bizonyítás szövegére, és aszerint dolgozzon! A tételek közül tetszőlegesen kiválaszthatja bármelyiket, azt a tételt kell bebizonyítania animáció segítségével. A bizonyításnál szöveget nem kell az ábra mellé írni, de az ábrán jelölni kell azokat az elemeket, amikre hivatkozik!

1. Az első dián tüntesse fel a tétel nevét, valamint – mint készítő – a saját nevét és iskolája nevét!
2. A kiválasztott tétel ábráját a lehetséges eszközök felhasználásával szerkessze meg! A merőleges biztosan 90°legyen, az egyenlő szakaszok tényleg egyenlők legyenek, aminek egy pontban kell találkoznia, az a lehető legjobban találkozzon egy pontban, a kör tényleg kör alakú legyen!
3. Figyeljen arra, hogy az animáció ne legyen öncélú! Sorrendje, az elemek láthatósága kövesse a bizonyítás gondolatmenetét, az animáció beállítása illeszkedjen a mutatnivalóhoz (pl. a háromszög ne darabonként, spirálúton jöjjön be)!
4. Munkájához jól használható a másolás, csoportosítás, csoportbontás; a megértetést segíti a megfelelő – értelemszerű – színezés.

Pontozási útmutató

Szövegszerkesztés

	Leírás	*Pont*
1.	Olvassa végig a szöveget, javítsa ki a helyesírási hibákat **(2),** és illessze be a megfelelő helyekre az ábrákat **(2)**, az egyenleteket **(2)**, a hiányzó szimbólumokat **(2)**! Az ábrák szövegen kívül, balról körülfutottan **(1)**, a képek a szövegben **(1)** legyenek.	10
2.	Az alábbi stílusok elkészítésével formázza a kapott szöveget! Vcím: 14 pt félkövér, Arial betű; középre zárt, előtte 36, utána 24 pont térköz; **(3)** Tételszám: 12 pt Times, félkövér, dőlt; bal oldali behúzás 1,5 cm, térköz előtte 18, utána 6 pt, együtt tartás. **(3)** Tétel: 12 pt Times, dőlt; sorkizárt bekezdés után 6 pt, együtt tartás. **(3)** Bizonyítás: 12 pt Times, bal oldali behúzás 1 cm, függő behúzás 0,75 cm, tabulátor balra igazított 1,75 cm-nél. **(3)** Megjegyzés: 12 pt Times, bal oldali behúzás 1 cm, sorkizárt, előtte 3 pt térköz. **(3)** (Mindegyik stílusnál: létezik a formátum: 1, stílusként van megadva: 1, végig: 1)	15
3.	Matematikai jelöléseknél a pontok, egyenesek szögek, változók jelölései dőlt betűsek **(3)**, egyes helyeken indexként **(2)** szerepelnek. Ennek megfelelően javítsa a szöveget!	5
4.	Készítse el az élőfejet, jobboldalt középre igazítva írja be nevét és iskolája nevét! Az élőlábba tegyen középre igazított oldalszámozást!	2
5.	A dokumentum végére készítsen tartalomjegyzéket **(mezőkódokkal, stílusok alapján: 3)**, és állítsa kéthasábosra **(1)**!	4

Táblázatkezelés

	Leírás	*Pont*
1.	A mintának megfelelő helyeken függvényekkel válaszoljon a következő kérdésekre:	
2.	Hány feladat tartozik az egyes témakörökhöz? **(kivonás)**	2
3.	Írja be az érettségi feladatok mellé, hogy melyik témakörből valók! **(fkeres)**	3
4.	Hányszor adtak feladatokat az egyes témakörökből? **(darabteli)**	3
5.	Melyik témakörből van leggyakrabban az érettségin feladat? **(max: 1 és ab.mező: 3)**	4
6.	A témakörhöz tartozó feladatok számához képest milyen arányban szerepeltek eddig a feladatok? **(osztás)**	2
7.	Melyik témakör szerepelt a legnagyobb arányban? **(max: 1, ab.mező: 3)**	4
8.	Számítsa ki, hány pontot értek el a diákok a dolgozatban és ez milyen jegynek felel meg! Ponthatár: 8-tól 2-es, 10-től 3-as, 12-től négyes, 14-től 5-ös **(tábla: 1, fkeres: 2).**	3
9.	Adja meg az egyes feladatokra, az összpontszámra és az osztályzatra, hogy átlagosan mennyi az eredmény.	2
10.	Függvénnyel adja meg, hogy az egyes jegyekből hány darab született! **(darabteli)**	3
11.	Készítsen diagramot a jegyek megoszlásának szemléltetésére! **(diagram: 1, kör: 2)**	3
12.	Formázza a munkáját a mintának megfelelően (cella – betűméret 10, címben 12 pont, Times N. R. – **(1)**; szegély **(1)**; fektetett oldal; név, iskola a fejlécben; alsó margó 1 cm (0,4 inch) **(2)**; oszlopszélességek kb.: 6×7,1+18,6+1,4+13+9×3,7+5+3,7 – férjen ki a lapra) **(1)**.	5

Bemutató

	Leírás	*Pont*
1.	Bizonyára ismerősek a szövegben szereplő tételek. Remélhetőleg van köztük olyan, amelyiknek a bizonyítását is érti. Ha nem, akkor nagyon figyeljen a bizonyítás szövegére, és aszerint dolgozzon! A tételek közül tetszőlegesen kiválaszthatja bármelyiket, azt a tételt kell bebizonyítania animáció segítségével. A bizonyításnál szöveget nem kell az ábra mellé írni, de az ábrán jelölni kell azokat az elemeket, amikre hivatkozik!	
2.	Az első dián tüntesse fel a tétel nevét, valamint a saját nevét és iskolája nevét!	3
3.	A kiválasztott tétel ábráját a lehetséges eszközök felhasználásával szerkessze meg! A merőleges biztosan 90°legyen **(3)**, az egyenlő szakaszok tényleg egyenlők legyenek **(3)**, aminek egy pontban kell találkoznia, az a lehető legjobban találkozzon egy pontban **(3)**, a kör tényleg kör alakú legyen **(1)**! **(feladattól függően, arányosan)**	10
4.	Figyeljen arra, hogy az animáció ne legyen öncélú! Sorrendje, az elemek láthatósága kövesse a bizonyítás gondolatmenetét **(sorrend: 5)**, az animáció beállítása illeszkedjen a mutatnivalóhoz **(stílus: 5)** (pl. a háromszög ne darabonként, spirálúton jöjjön be)!	10
5.	Munkájához jól használható a másolás, csoportosítás, csoportbontás **(egybevágóság, fedés: 4)**, a megértetést segíti a megfelelő – értelemszerű – színezés **(3)**.	7

Összesen:

szövegszerkesztés 36 pont,
táblázatkezelés 34 pont,
előadás-készítés 30 pont.

Továbbküldés 60 ponttól.
A megoldásra fordítható idő: 180 perc.