Geometria tételek

35.

Tétel: A háromszög oldalainak felezőmerőlegesei egy pontban metszik egymást.

Legyen az ABC háromszög oldalainak felezőmerőlegese e. Ennek minden pontja egyenlő távolságra van A-tól és B-től. A BC oldal felezőmerőlegese f. Ennek minden pontja egyenlő távolságra van B-től és C-től. Mivel AB és BC metszi egymást, felezőmerőlegeseik e és f is metszik egymást. Az M metszéspont egyenlő távolságra van A-tól és B-től és B-től és C-től is; vagyis mindhárom ponttól, eszerint A-tól és C-től is. Tehát M rajta van az AC oldal felezőmerőlegesén. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk. A három felezőmerőleges egyetlen közös pontja az M, a háromszög három csúcsától egyenlő távolságra van. Így ez a pont a háromszög köré írható kör középpontja.

36.

Tétel: A háromszög belső szögfelezői egy pontban metszik egymást.

Legyen az ABC háromszög \* szögének szögfelezője f\*. Ennek minden pontja egyenlő távolságra van a b és a c oldaltól. A \* szög szögfelezője f\*. Ennek minden pontja egyenlő távolságra van az a oldaltól és a c oldaltól. Az f\* és az f\* szögfelezők a háromszög belsejében metszik egymást, a metszéspont N, amely egyenlő távolságra van b-től és c-től is, és a-tól és c-től is, vagyis mindhárom oldaltól. Eszerint egyenlő távol van a-tól és b-től is, tehát rajta van \* szögfelezőjén is (kihasználjuk, hogy N a háromszög belsejében van). A három belső szögfelező egyetlen közös pontja az N, az ABC háromszög mindhárom oldalát érintő kör középpontja.

37.

Tétel: A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik gymást.

A háromszög magasságvonala a háromszög egyik csúcsából a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőleges. Egy háromszögnek három magasságvonala van.

ma az ABC háromszög A csúcshoz tartozó magasságvonala, mb a B csúcshoz tartozó magasságvonal, mc a C csúcshoz tartozó magasságvonal. Húzzunk a háromszög csúcsain keresztül párhuzamosokat a szemközti oldalakkal. Az eredeti háromszög csúcsai A, B, C, az új háromszög csúcsai A’, B’, C’ (az ábra szerint). Az A’B’C’ háromszög származtatásából következik, hogy az ABCB’ , AC’BC , ABA’C négyszögek paralelogrammák. Az eredeti háromszög oldalai az új háromszögnek középvonalai. Az A csúcs a B’C’ oldal felezőpontja, B az A’C’ oldal felezőpontja, C az A’B’ oldal felezőpontja. Így az A’B’C’ háromszög származtatását figyelembe véve az mc magasságvonal egyúttal az A’B’ oldal felezőmerőlegese, mb az A’C’ oldal felezőmerőlegese, ma a B’C’ oldal felezőmerőlegese. Mivel az eredeti háromszög magasságvonalai az új háromszög felezőmerőlegesei, és bármely háromszög felezőmerőlegesei egy pontban metszik egymást, ezért a háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást. A háromszög magasságvonalainak metszéspontját a háromszög magasságpontjának nevezzük.

38/a.

Thalész tétele: Egy kör tetszőleges átmérőjének két végpontját a körvonal bármely más pontjával összekötve derékszögű háromszöget kapunk. Az átmérő a derékszögű háromszög átfogója.

A kör átmérője legyen AB, a körvonal tetszőleges, A-tól és B-től különböző pontja C. Rajzoljuk Be az OC sugarat. Az AOC és a BOC háromszög egyenlőszárú. Az AOC háromszögnek az alapon fekvő szögét jelöljük \*val, a BOC háromszögnek az alapon fekvő szögét -val. Az ABC háromszög belső szögeinek összege:\*\*\*\*\*. Ezt rendezve és kettővel osztva kapjuk, hogy \*\*\*\*. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

38/b.

Thalész tételének megfordítása: Derékszögű háromszög köré írt kör középpontja az átfogó felezőpontja, az átfogó a kör átmérője.

Azt kell megmutatnunk, hogy az átfogó felezőpontja egyenlő távolságra van a háromszög csúcsaitól. Tükrözzük az ABC háromszöget az átfogó F felezőpontjára. A középpontos tükrözés tulajdonságai miatt egy olyan paraleleogrammát kapunk, melynek két szemközti szöge derékszög. A paralelogramma tehát téglalap. A téglalap átlói egyenlő hosszúak és felezik egymást. Így tehát \*\*\*\*\*; épp a háromszög köré írt kör sugarával egyenlőek. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

55.

Tétel: A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást.

Egy háromszög súlyvonala a háromszög egyik csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz. A háromszögnek három súlyvonala van.

Az ABC háromszög AC oldalának felezőpontja E, BC oldalának felezőpontja F. A BE és az AF súlyvonalak metszéspontja S. Az EF középvonal párhuzamos az AB oldallal, ezért SEF és SBA szögek váltószögek, az EFS és SAB szögek szintén váltószögek, ESF és ASB szögek pedig csúcsszögek. Tehát az ABS és az FES háromszögek hasonlók, mert szögeik páronként egyenlők. Mivel az EF középvonal hossza fele a szemközti AB oldal hosszának, ezért a hasonlóság aránya 2:1. Így az EB és az FA súlyvonal az EB szakasz E-hez közelebbi harmadolópontjában metszi egymást. Hasonlóan látható be, hogy az EB súlyvonal és a C csúcsból induló súlyvonal is ugyanebben a pontban (S-ban) metszi egymást. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. A háromszög súlyvonalainak metszéspontját súlypontnak hívjuk. Mint a bizonyításból kiderül. a súlypont az egyes súlyvonalak az oldalakhoz közelebbi harmadoló pontja.

58

Szögfelezőtétel: A háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja.

A háromszög B csúcsából induló szögfelező a szemközti oldalt a D pontban két részre osztja. Jelöljük ezeket b1-gyel és b2-vel. A tétel állítása szerint: \*\*\*.

Hosszabbítsuk meg a háromszög c oldalát B-n túl a val. Az így kapott E pontot C-vel összekötve CBE egyenlőszárú háromszöget kapunk. Ennek a B csúcsnál levő külső szöge \*, így az alapon fekvő szögei \*/2 nagyságúak. A CEB és EBA szögek egyállásúak, mivel egyik száruk közös és nagyságuk megegyezik. Így másik száruk BD és EC párhuzamos. Az A csúcsnál lévő szögre a párhuzamos szelők tételét alkalmazva a bizonyítandó állítást kapjuk.

63.

Befogótétel: A derékszögű háromszög befogója az átfogónak és a befogó átfogóra vetett merőleges vetületének mértani közepe.

Legyen az ABC derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságaának talppontja T. A BC (a) befogóra bizonyítjuk, hogy BT (p) és az AB (c) mértani közepe. Az ABC háromszög BTC háromszöghöz, mert egy-egy szöge (\*) közös, és van egy derékszögük, így szögeik megegyeznek. Ezért a két háromszög hasonló.A \* szög melletti befogók és az átfogók arányát felírva \*\*\*\*\* Innen \*\*\*\*\*; Mivel a csak pozitív lehet \*\*\*\*\*. Hasonlóan bizonyítható , hogy \*\*\*\*\*. Ezzel a tételt bizonyítottuk.

64.

Magasságtétel: A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogót két szeletre osztja, melyeknek mértani közepe a magasság.

Legyen az ABC derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságának (m) talppontja T. Az m magasságra bizonyítjuk, hogy a BT (p) és az AT (q) mértani közepe. Az ACB derékszöget az m magasság két részre bontja, melyből TCB a TAB (\*) szöggel azonos nagyságú, mert azonos fajtájú merőlegesszárú szögek. Ugyanígy ACB szög egyenlő ABC (\*) szöggel. Mivel ATC és CTB háromszögek derékszögűek, mindhárom szögük megegyezik, tehát a két háromszög hasonló. A hasonlóság miatt megfelelő oldalaik, vagyis a megfelelő (\*, illetve\*) szögek melletti befogókra felírt arányuk megegyezik. Ezért \*\*\*\*\*, inenn \*\*\*\*\*. Mivel a magasság pozitív: \*\*\*\*. Ezzel a tételt bizonyítottuk.